

Nome:

Cognome:

Matricola:

Fila C

Regole: Voto minimo di ogni esercizio = 0. Esercizi 1–4: risposta giusta = 1, risposta non data = 0, risposta sbagliata = $-\frac{1}{2}$. Esercizi 5–6: punti 0–8.

Esercizio 1 Sia $y \in C^2(\mathbb{R})$ una funzione 1-periodica, e si supponga che y è una soluzione dell'equazione differenziale $w''(t) - 3w(t) = 2f(t)$ con $f \in C^0(\mathbb{R})$ diversa dalla funzione nulla.

1. f è periodica. V F
2. La funzione $z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $z(t) := y(t) - 3$ è soluzione della stessa equazione differenziale. V F
3. La funzione $z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $z(t) := y(t) + t^2$ è soluzione dell'equazione differenziale $w''(t) + w(t) = f(t) + t^2 + 2$. V F
4. Se t_0 è un punto di minimo locale per y allora $f(t_0) \geq y(t_0)$. V F

Esercizio 2 Sia $f(x)$ una funzione continua in \mathbb{R} tale che $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -5$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.

1. f è limitata in \mathbb{R} V F
2. f è monotona V F
3. esiste x_0 tale che $f(x_0) = 0$ V F
4. f ammette massimo V F

Esercizio 3 Siano

$$H(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \geq 0 \\ 0 & \text{se } t < 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad F(x) = \int_0^x H(t)H(1-t) dt.$$

1. La funzione $H(t)$ è integrabile in $[0, 4]$. V F
2. La funzione $F(x)$ è derivabile in $x = 1$. V F
3. Esiste $c \in (-2, 2)$ tale che $\frac{F(2)-F(-2)}{4} = H(c)H(1-c)$. V F
4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$. V F

Esercizio 4 Sia $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione tale che $a_n > 0 \forall n \in \mathbb{N}$. Supponiamo che la corrispondente serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n =: S$ sia convergente. Allora, posto $S_n := \sum_{k=1}^n a_k$ si ha:

1. $\lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{n=k}^{+\infty} a_n = 0$. V F
2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \log(|\sin(a_n)|) = -\infty$. V F
3. $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n+3-n^2)$ è convergente. V F
4. $\lim_{n \rightarrow +\infty} (S_n)^2 - \log(n) = -\infty$. V F

Esercizio 5 Sia

$$f(x) = x |\log(1+x)|.$$

Si determinino

1. il dominio e gli asintoti;
2. l'insieme di derivabilità e la monotonia;
3. gli intervalli di concavità e di convessità;
4. il valore dell'integrale $\int_{-\frac{1}{2}}^1 f(x) dx$.

Esercizio 6 Sia

$$f(x) = e^{\sin(\frac{1}{2}x)} - 1 - \log(1 + \frac{1}{2}x).$$

1. Determinare al variare di $\beta > 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^\beta}.$$

2. Determinare per quali $\beta > 0$ il seguente integrale converge

$$\int_0^1 \frac{|f(x)|}{x^\beta} dx$$